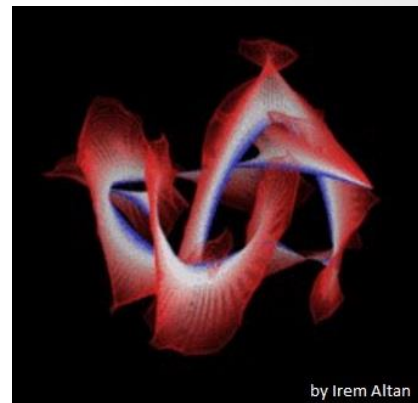


Mattia Mecchia

Università degli studi di Trieste



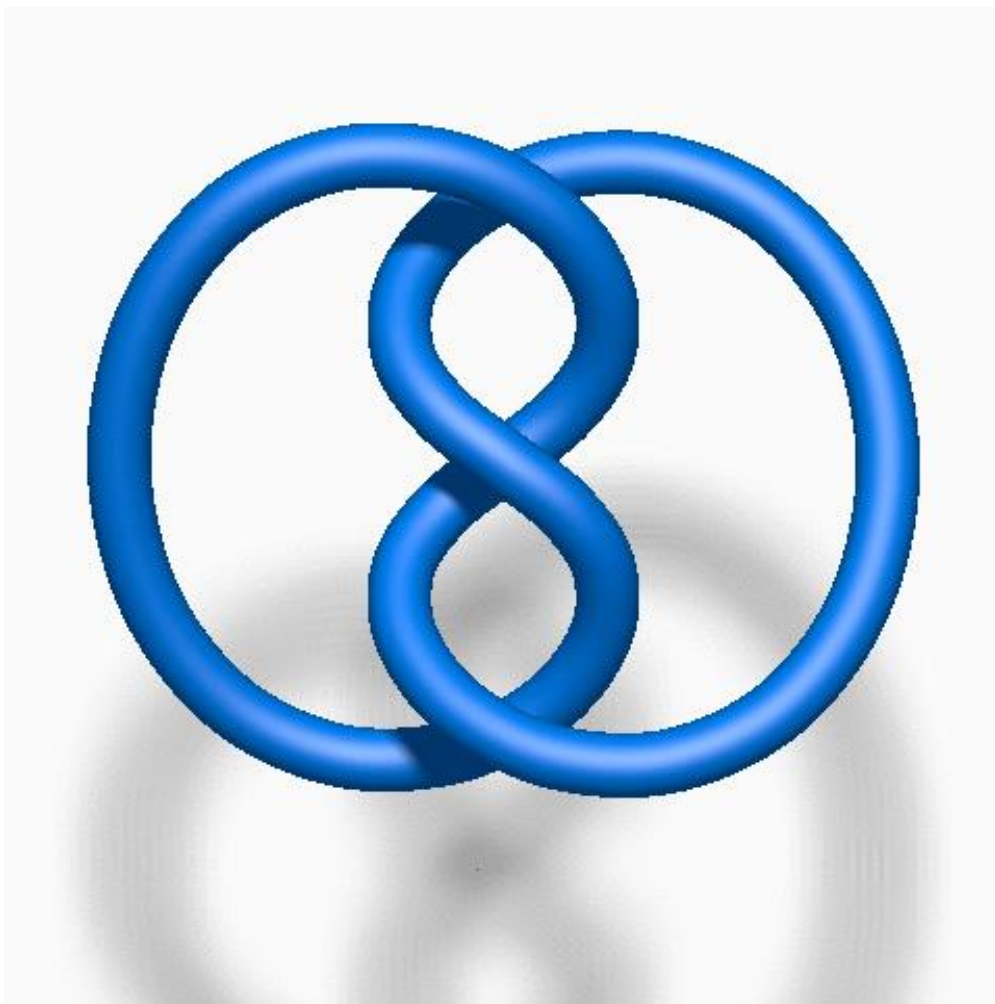
LA TEORIA DEI NODI: UN PUNTO D'INCONTRO FRA ARTE, MATEMATICA E SCIENZA



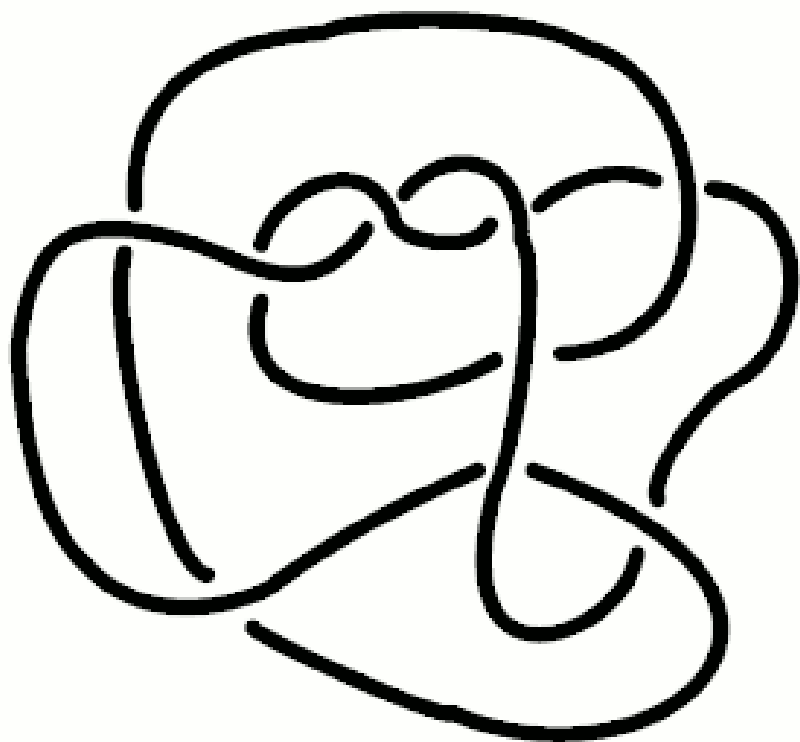
31/03/2020

Collegio Universitario

«Luciano Fonda»

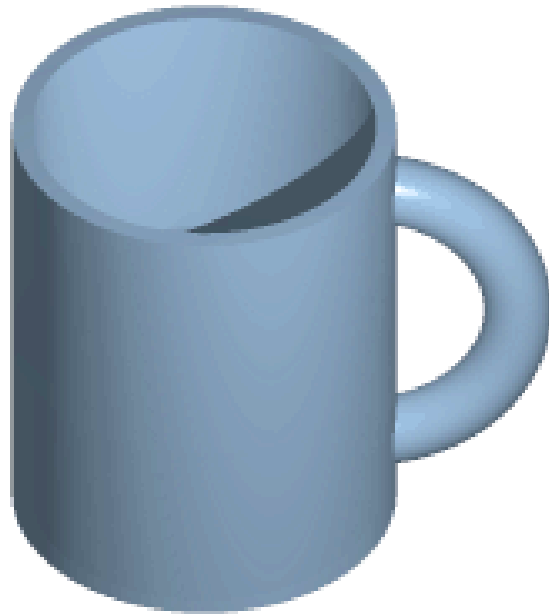


Il nodo trifoglio

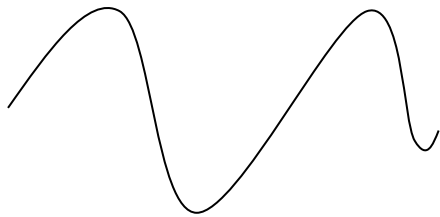


Equivalenza fra nodi

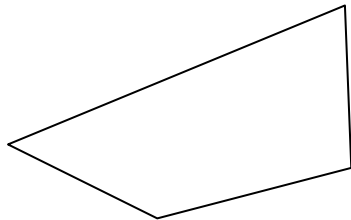
- Il topologo non distingue la tazza dalla ciambella:



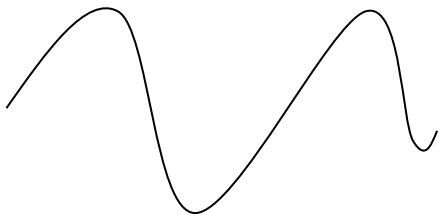
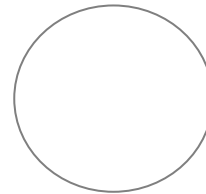
Cosa è vietato in topologia? **Tagliare e incollare.**



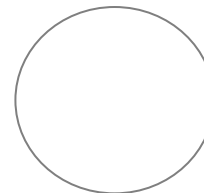
equivalenti

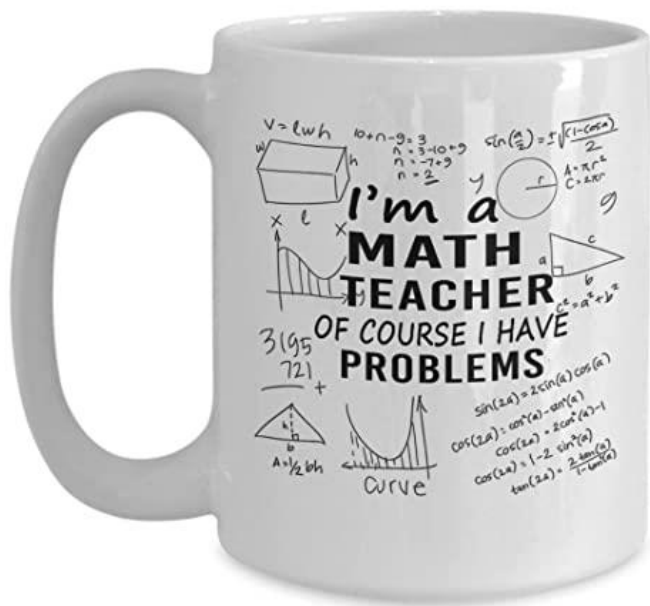


equivalenti



non equivalenti





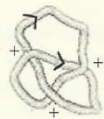
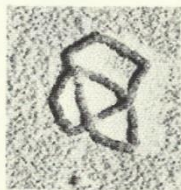
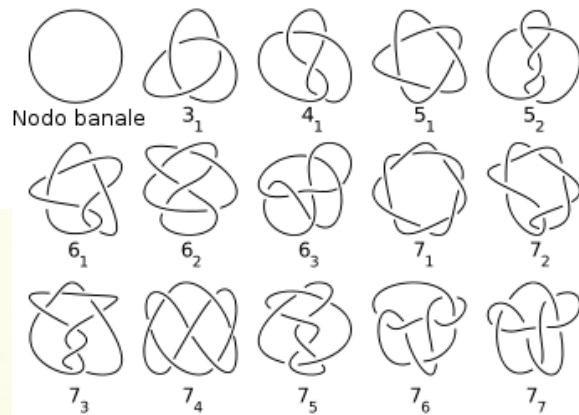
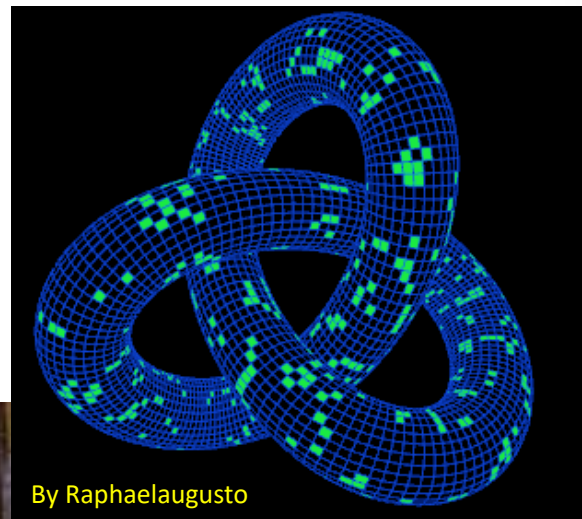


FIGURE 6. Electron microscope image of knotted DNA. Courtesy: Shailja Pathania

Perché parlare di teoria
dei nodi?



By Raphaelaugusto





Le origini

I PRECURSORI:

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796):

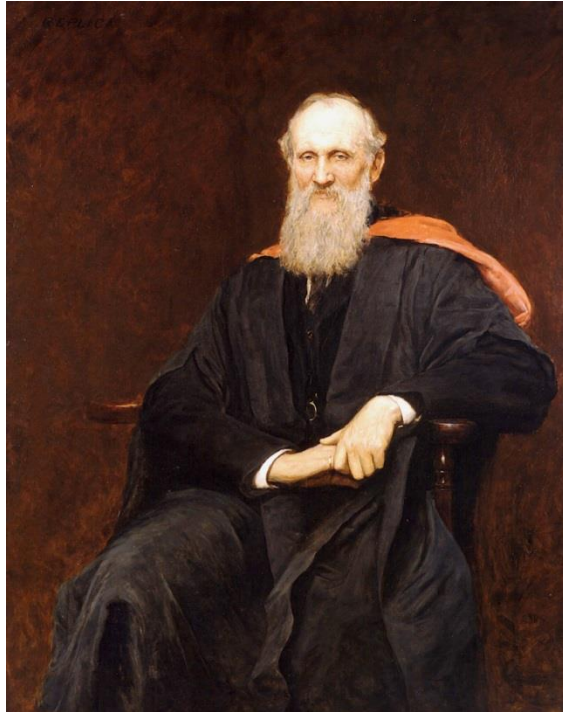
"Whatever the twists and turns of a system of threads in space, one can always obtain an expression for the calculation of its dimensions, but this expression will be of little use in practice. The craftsman who fashions a braid, a net, or some knots will be concerned, not with questions of measurement, but with those of position: what he sees there is the manner in which the threads are interlaced"

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855):



definisce il linking number

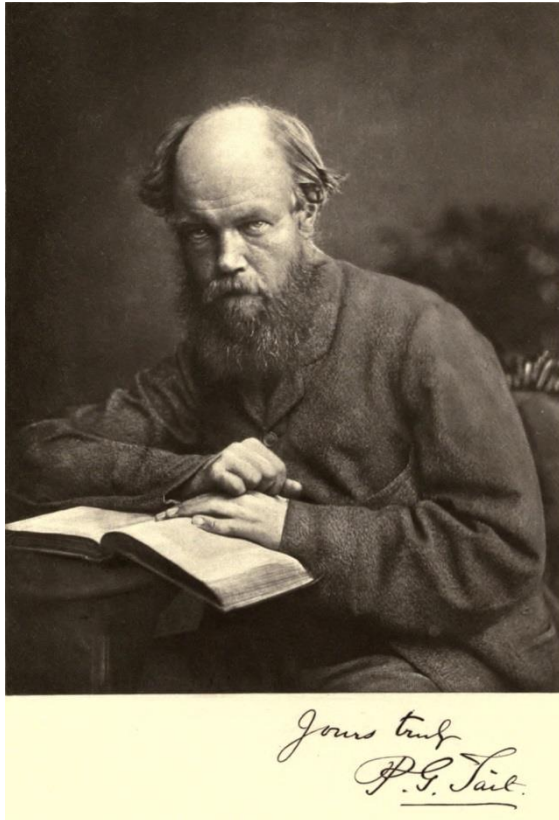
IL PRIMO GRANDE SVILUPPO



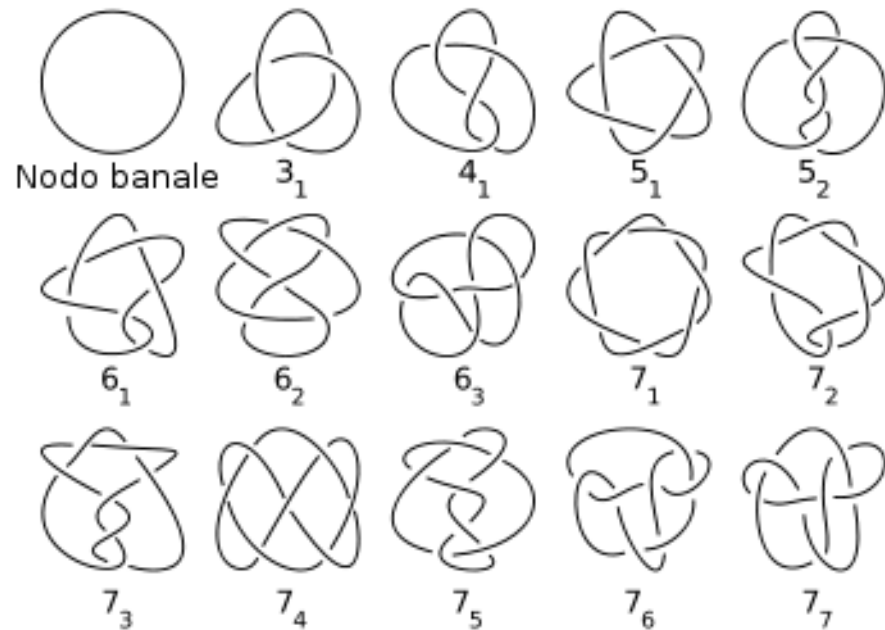
William Thomson, I barone Kelvin (1824-1907)

1867 formula la teoria dei **Vortex Atoms**

IL PRIMO GRANDE SVILUPPO



P. G. Tait, T. Kirkman, C. N. Little
tabulano i nodi con meno di 10
incroci



ma la teoria di Thomson fallisce...

Modello Atomico di
Thomson (**Fisica**)

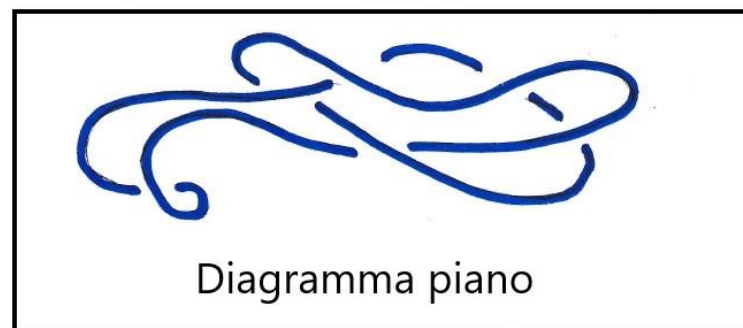
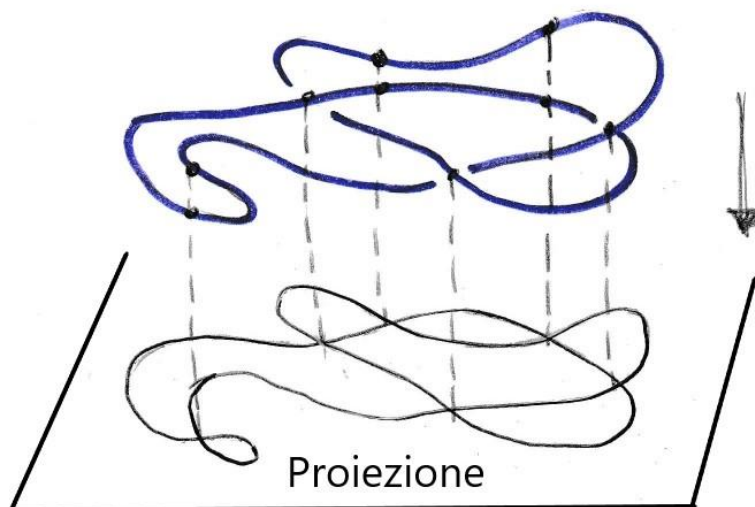
Arte

Artigianato/tecnologia

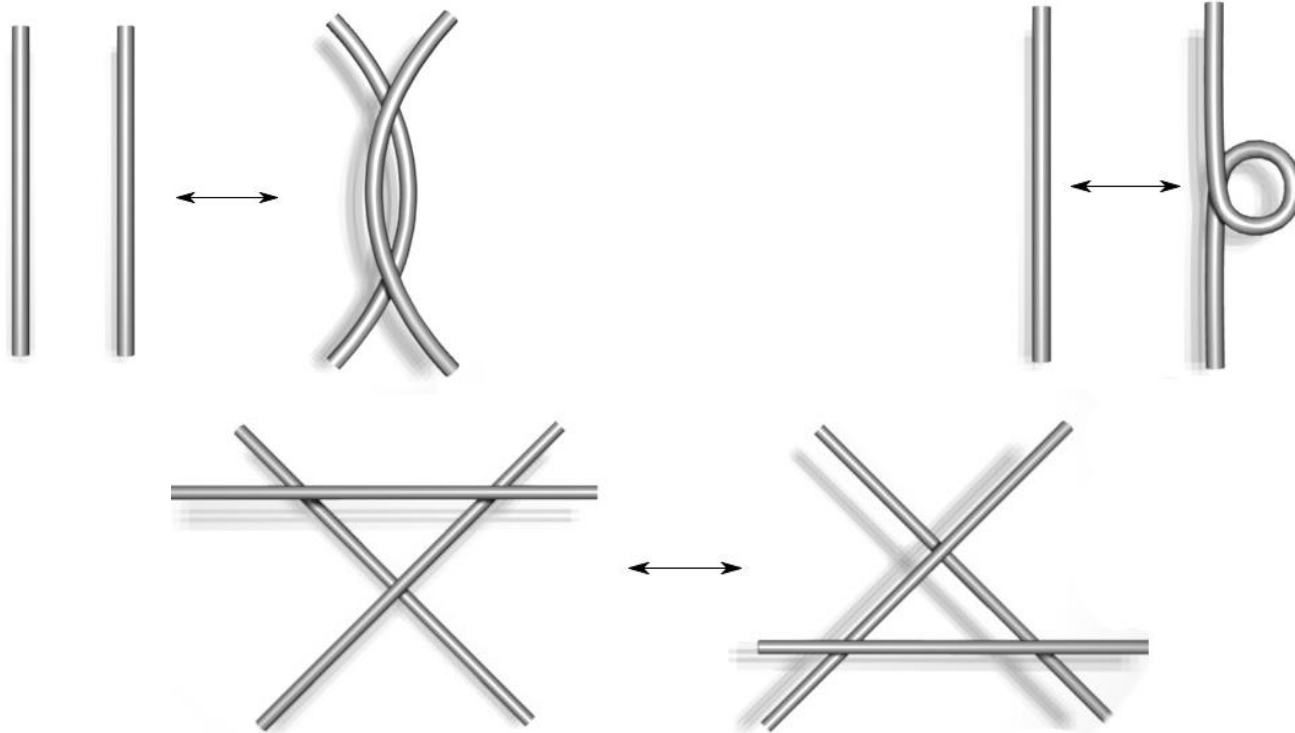
Topologia

Teoria dei nodi

IL DIAGRAMMA DI UN NODO



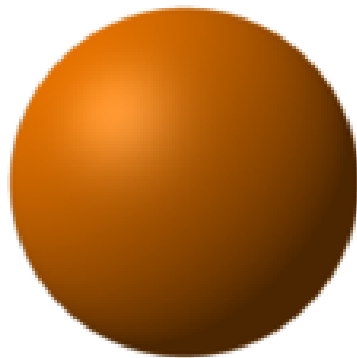
LE MOSSE DI REIDEMEISTER (1927)



Due nodi sono equivalenti se e solo se hanno dei diagrammi legati da un numero finito di mosse di Reidemeister

VARIETA' DI DIMENSIONE TRE

Varietà di
dimensione 2
(superfici)



E le varietà di dimensione 3?
Sembrava un problema intrattabile...

VARIETA' DI DIMENSIONE TRE



William Thurston (1946-2012)

La congettura di geometrizzazione di Thurston
(1982)

Topologia

Varietà 3-dimensionali

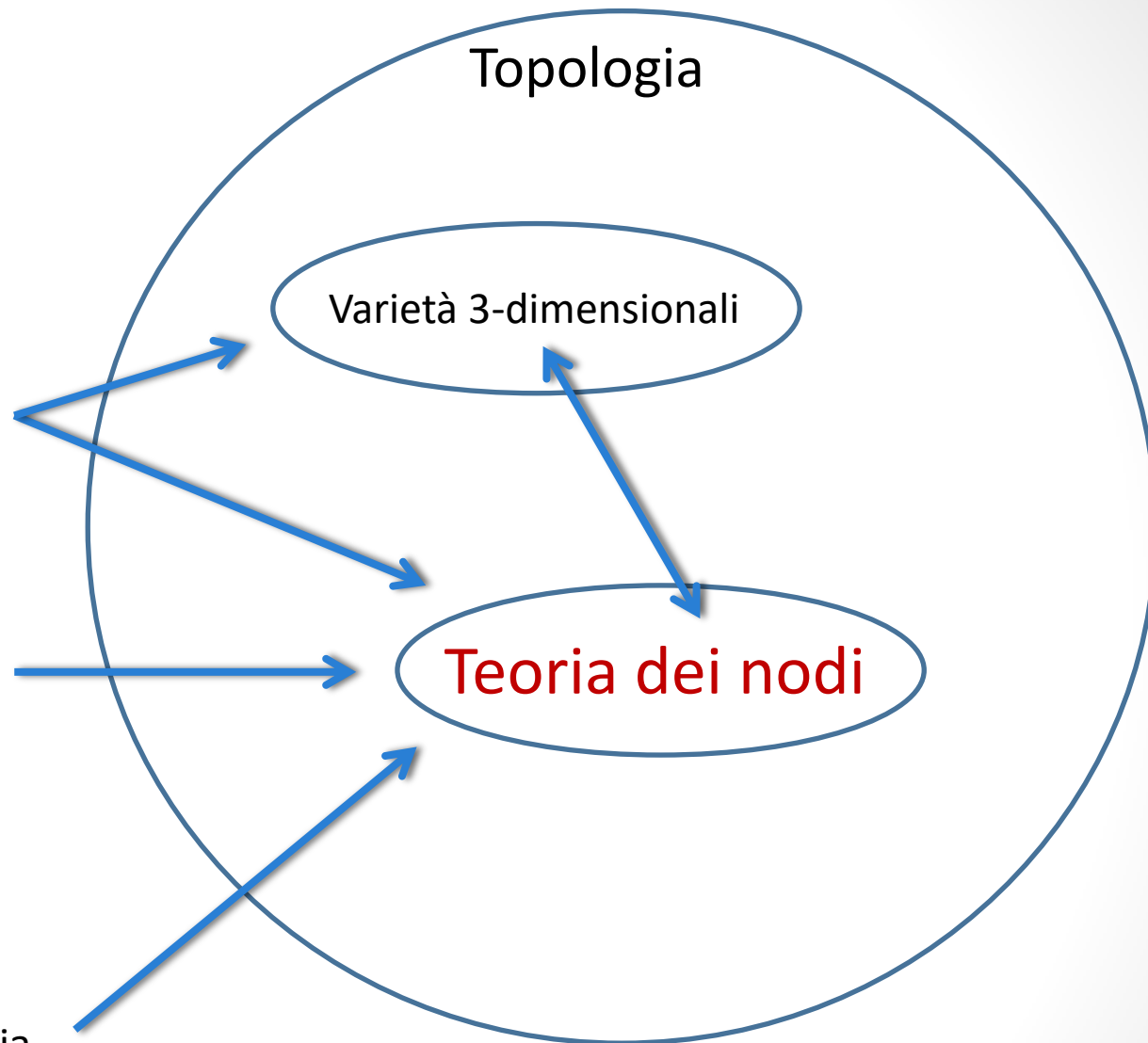
Geometria

Arte

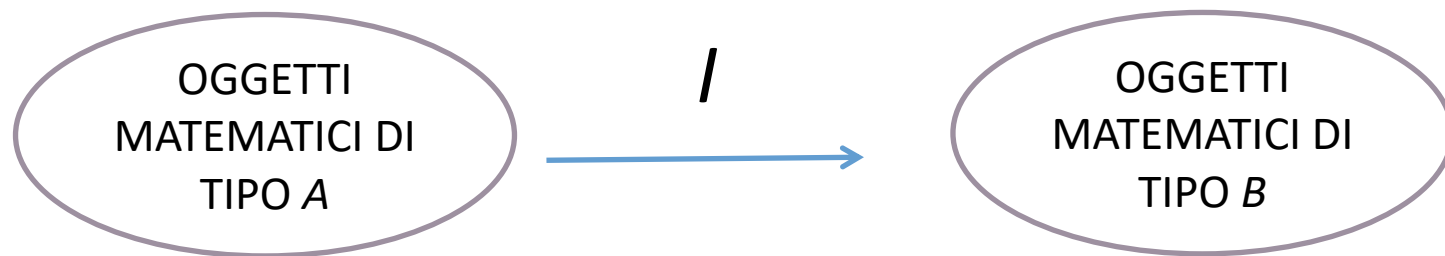
Teoria dei nodi

Artigianato/tecnologia

I nodi al centro



INVARIANTI



Se x è un oggetto di tipo A , allora $I(x)$ è un oggetto di tipo B .

L'invariante I ha la seguente proprietà:

Se x e y sono due oggetti di tipo A equivalenti allora $I(x)$ e $I(y)$ sono due oggetti di tipo B equivalenti cioè:

$$x \sim y \Rightarrow I(x) \sim I(y)$$

In generale non è vero il viceversa.

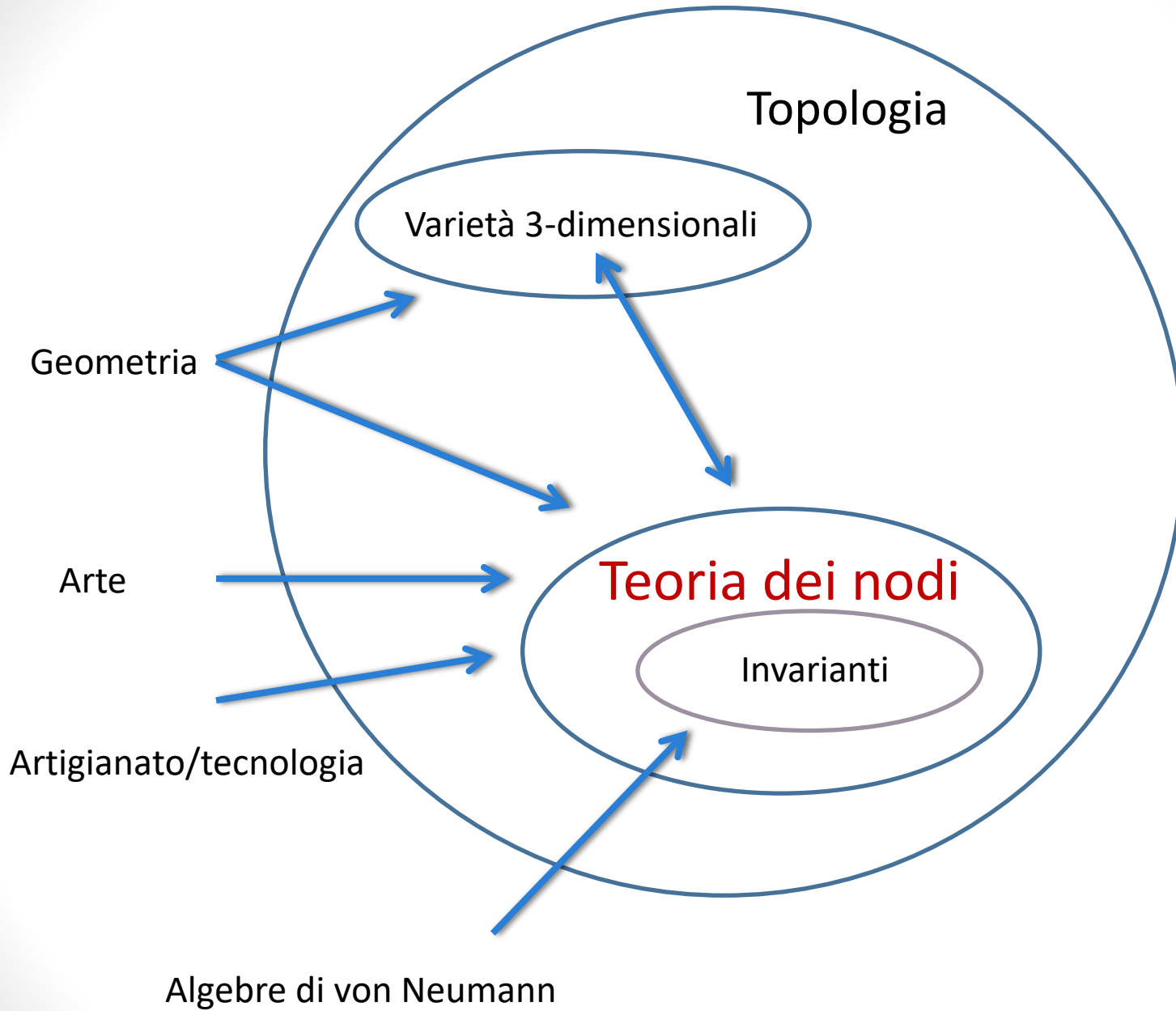
Questo si usa soprattutto nel seguente modo:

$$I(x) \not\sim I(y) \Rightarrow x \not\sim y$$

UN NUOVO INVARIANTE PER NODI



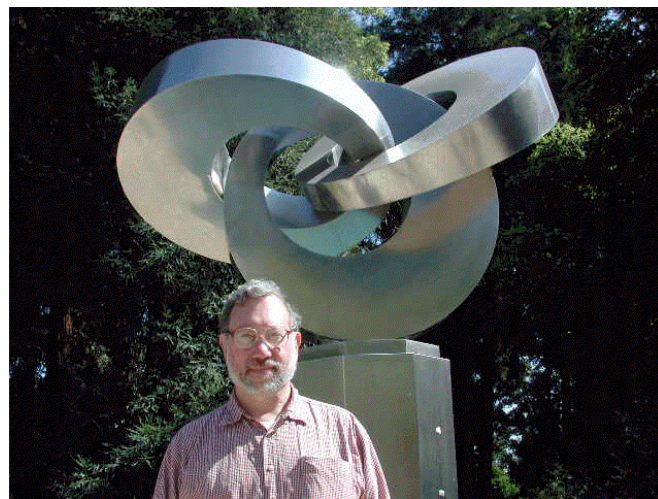
Sir Vaughan Jones (1952-)
Il polinomio di Jones



UN NUOVO INVARIANTE PER NODI

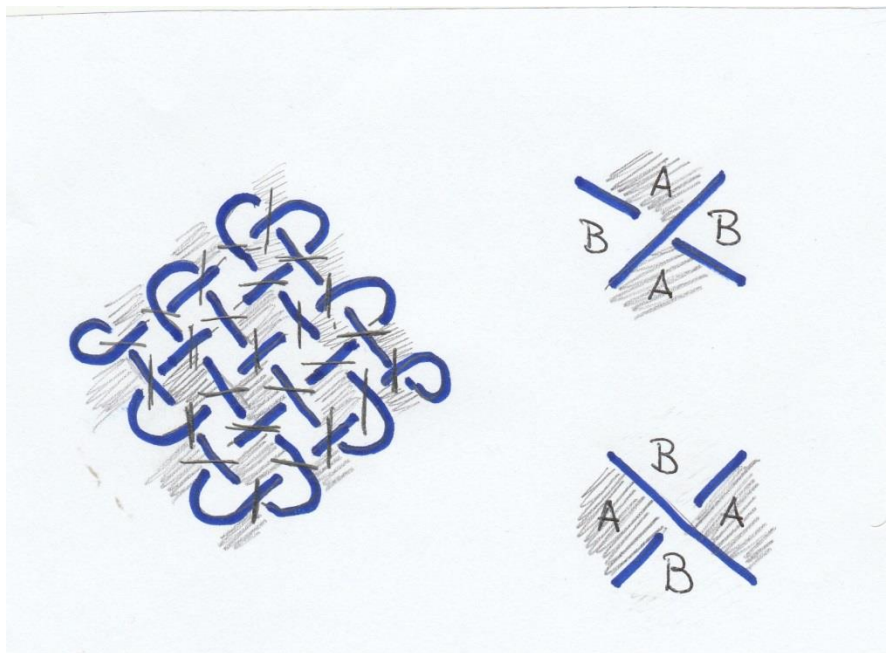
- L'invariante è molto potente! Ha risolto dei problemi aperti.
- Ma purtroppo (o per fortuna) non è un invariante totale...
- Ha una definizione molto interessante (che non è quella di Jones).

Louis H. Kauffman
nel 1987 introduce il
Kauffmann bracket



UN NUOVO INVARIANTE PER NODI

L'idea viene dalla fisica statistica



$$\langle L \rangle = \sum_s A^{\alpha(s) - \beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma(s)}$$

UN NUOVO INVARIANTE PER NODI

Le regole di calcolo del Kauffman bracket

$$1. \langle \bigcirc \rangle = 1$$

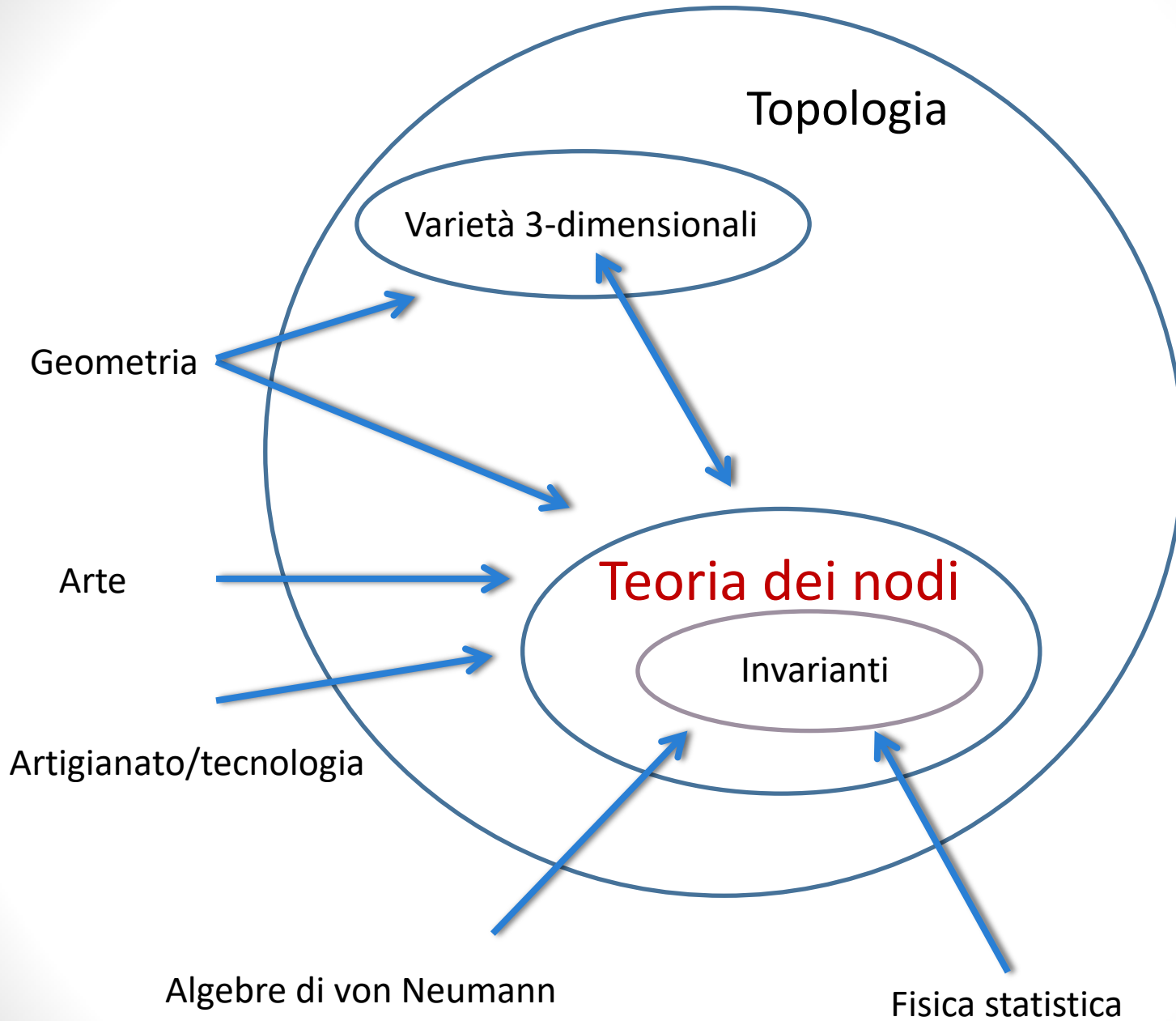
$$2. \langle L \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$$

$$3. \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle$$

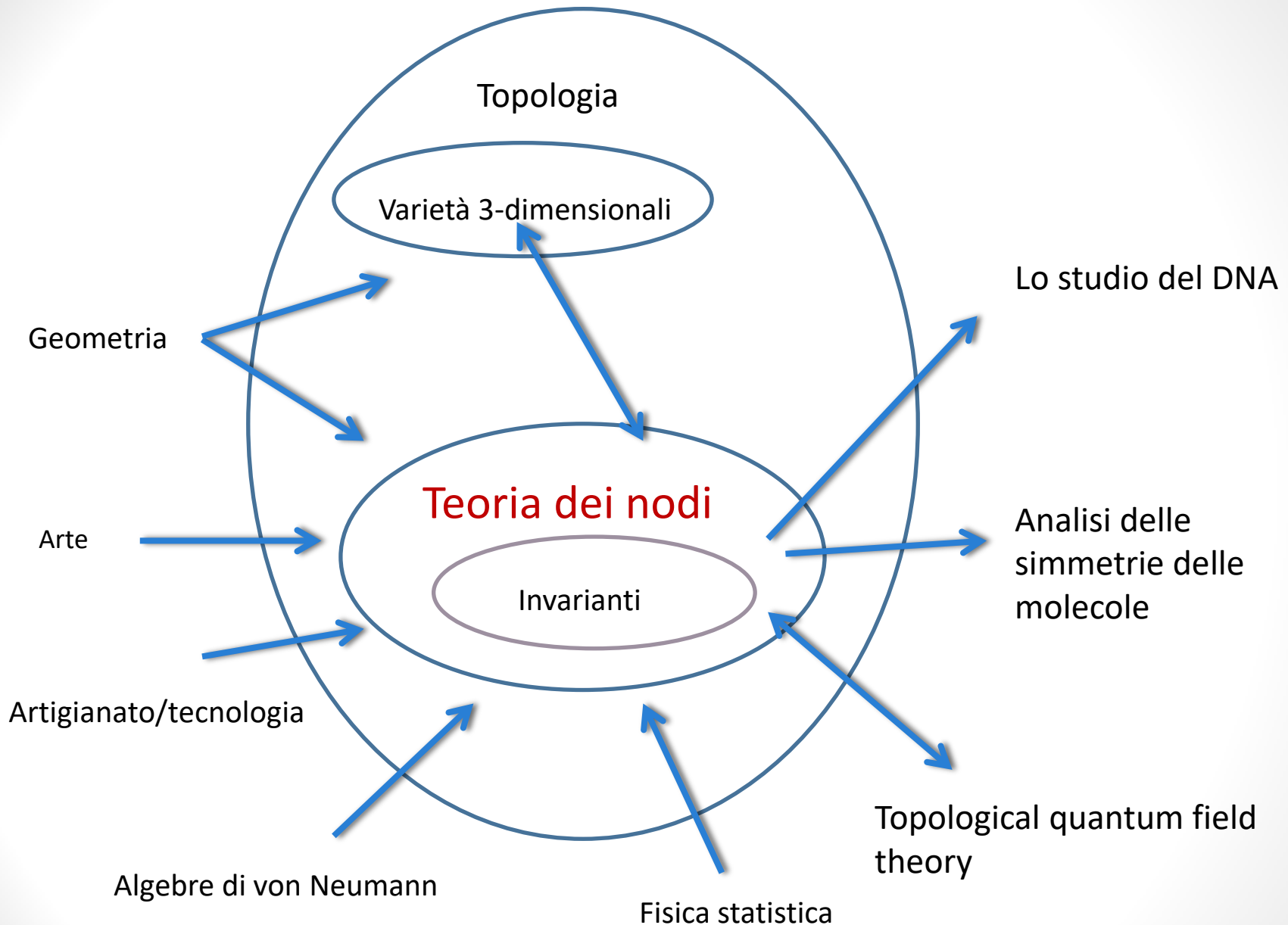
La relazione con il polinomio di Jones

$$J(L) = (-A)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle$$

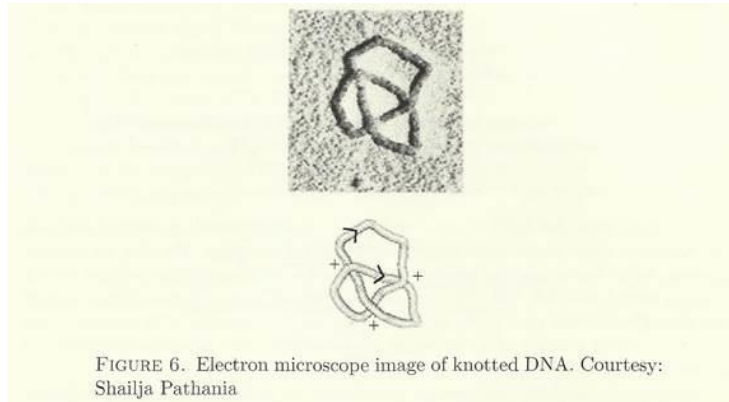
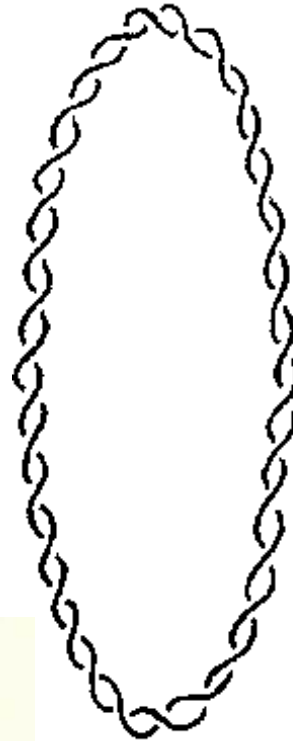
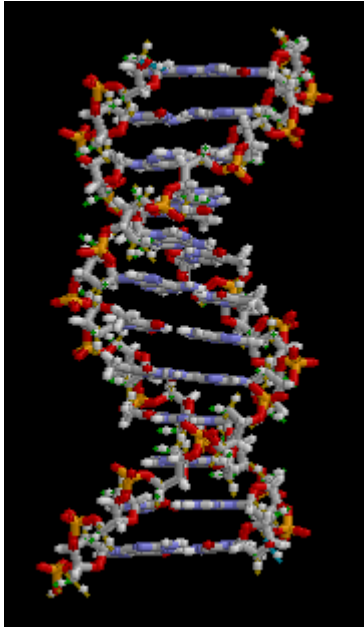
Usando queste formule si può dimostrare
l'invarianza rispetto alle mosse di Reidemeister



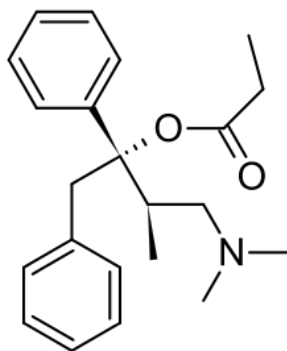
E la storia continua: nuovi
invarianti, nuovi risultati, nuove
congetture e nuovi collegamenti!
E le applicazioni?



LA STRUTTURA TERZIARIA DEL DNA

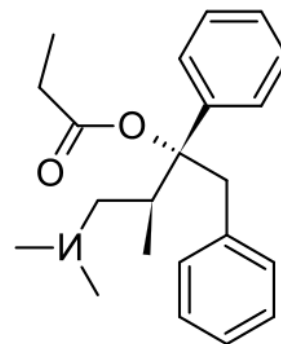


CHIRALITA' DELLE MOLECOLE



DARVON

Dextropropossifene
Analgesico



NOVRAD

Levopropossifene
Antitussivo

Una molecola è **achirale** se è *sovrapponibile* alla sua immagine speculare. Altrimenti la molecola si dice **chirale**

CHIRALITA' DELLE MOLECOLE

*Sovrapponibile
geometricamente
(movimento rigido)*



*Sovrapponibile
chimicamente*



*Sovrapponibile
topologicamente
(movimento continuo)*

*Achirale
geometricamente*



*Achirale
chimicamente*



*Achirale
topologicamente*

***Chirale
topologicamente***



*Chirale
chimicamente*



*Chirale
geometricamente*

Per far vedere la chiralità topologica si usano tecniche tipiche della teoria dei nodi

BIBLIOGRAFIA MINIMA

Alexei Sossinsky:

«Nodi. Genesi di una teoria Matematica»

Bollati Boringhieri 1999

Dorothy Buck e Erica Flapan (Editors):

«Applications of knot theory»

American Mathematical Society 2009