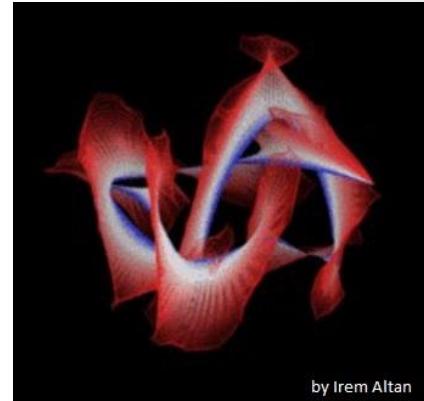


*Mattia Mecchia*

*Università degli studi di Trieste*

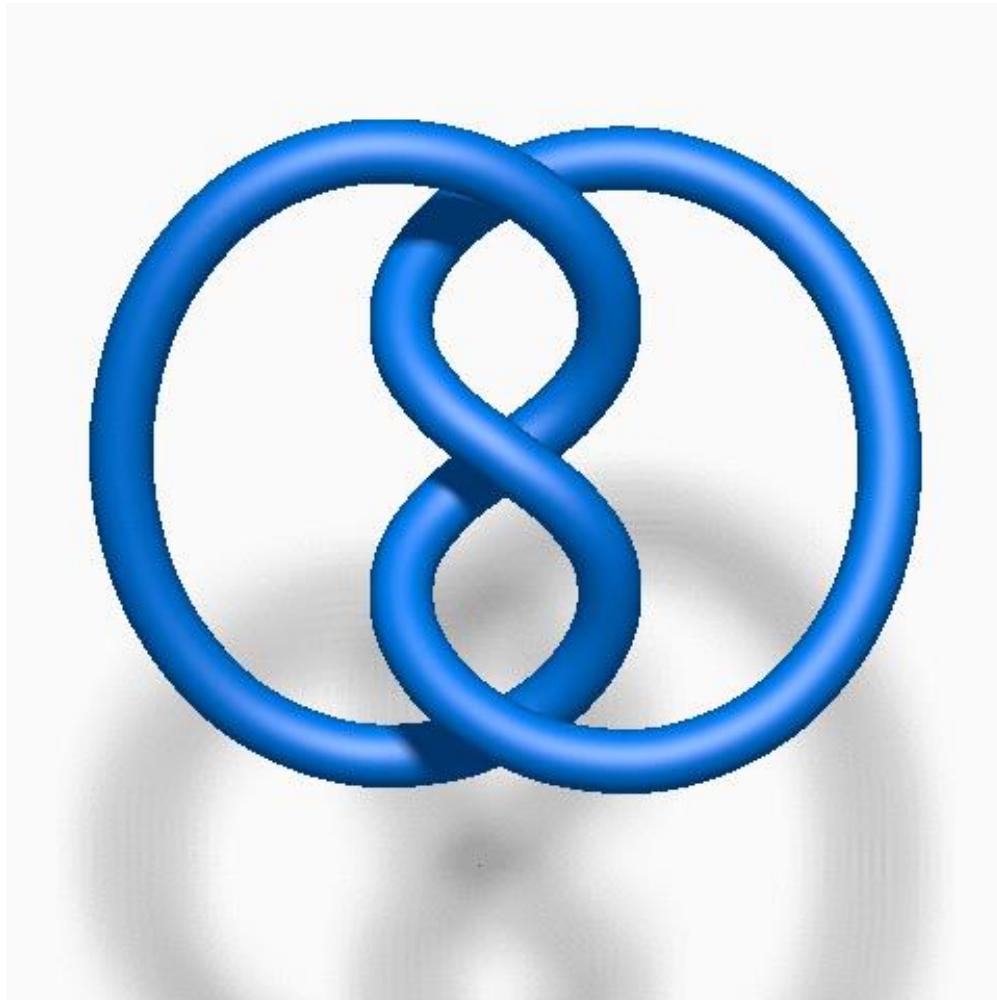


# LA TEORIA DEI NODI: UN PUNTO D'INCONTRO FRA ARTE, MATEMATICA E SCIENZA

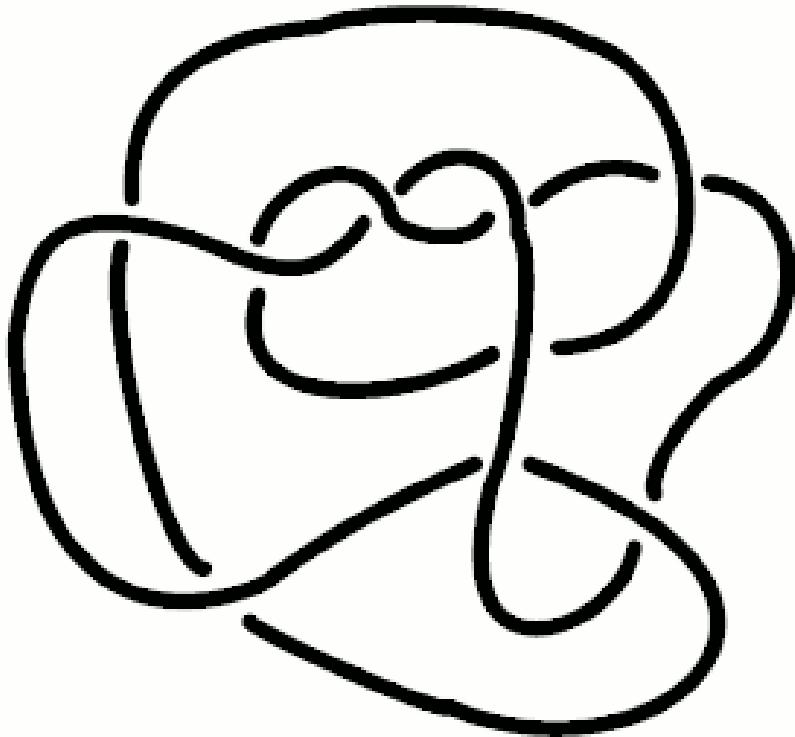


*31/03/2020*

*Collegio Universitario  
«Luciano Fonda»*

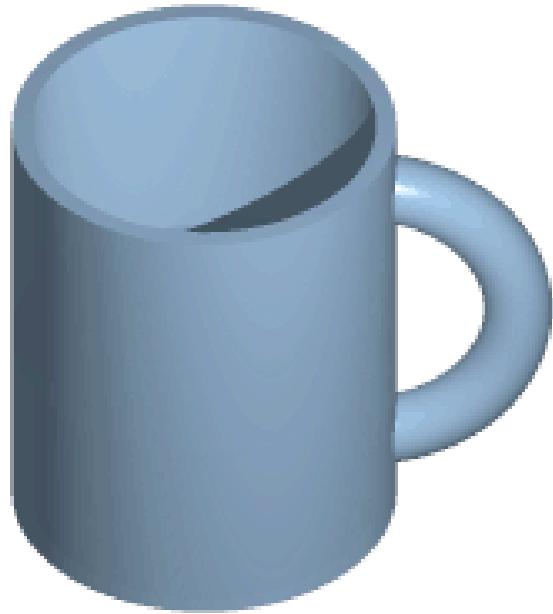


*Il nodo trifoglio*

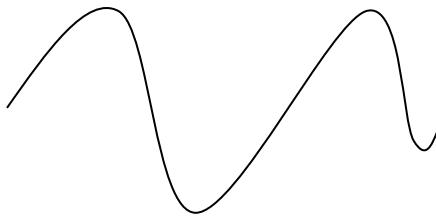


*Equivalenza fra nodi*

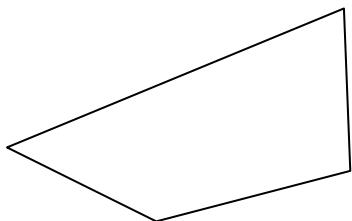
- Il topologo non distingue la tazza dalla ciambella:



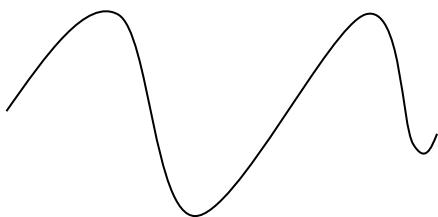
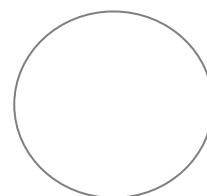
Cosa è vietato in topologia? Tagliare e incollare.



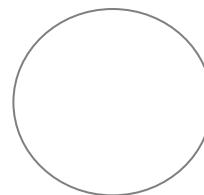
equivalenti

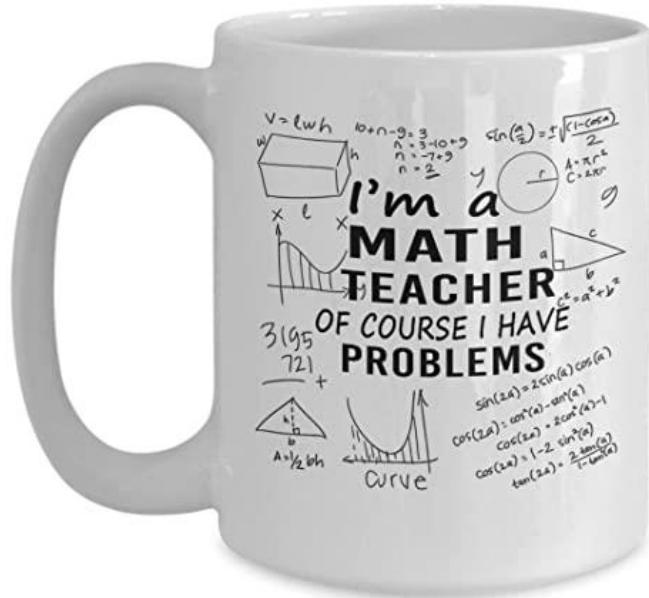


equivalenti



non equivalenti





# Perché parlare di teoria dei nodi?

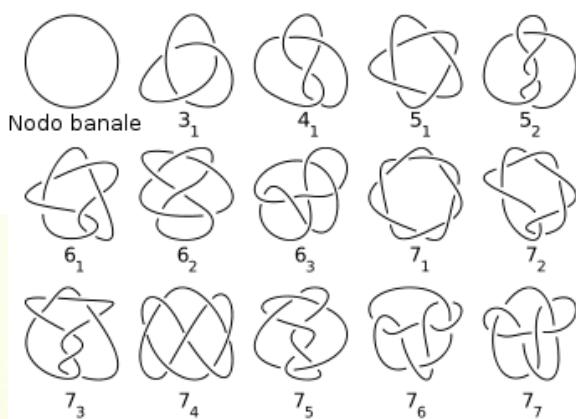
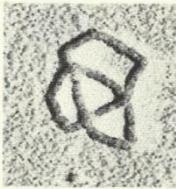
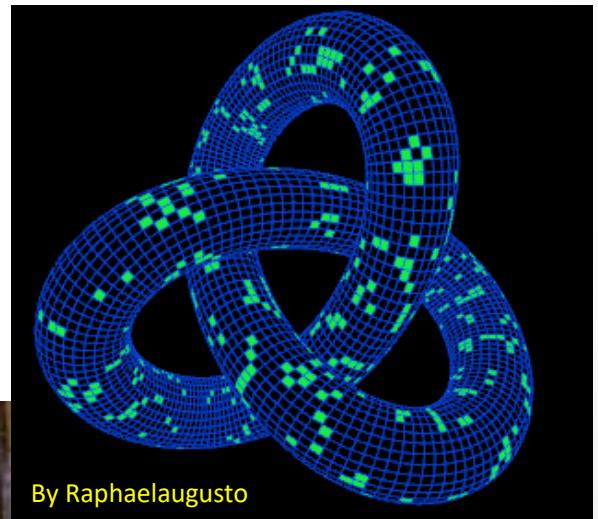


FIGURE 6. Electron microscope image of knotted DNA. Courtesy:  
Shailja Pathania



# Le origini



# I PRECURSORI:

## Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796):

*"Whatever the twists and turns of a system of threads in space, one can always obtain an expression for the calculation of its dimensions, but this expression will be of little use in practice. The craftsman who fashions a braid, a net, or some knots will be concerned, not with questions of measurement, but with those of position: what he sees there is the manner in which the threads are interlaced"*

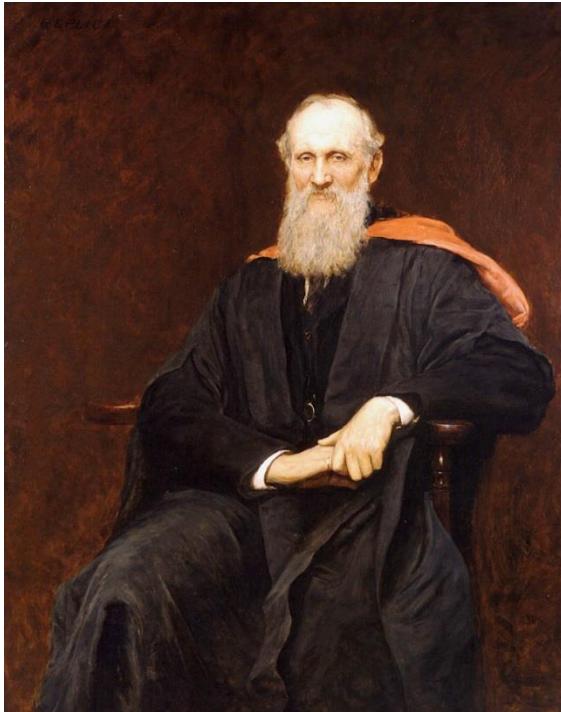
## Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855):



*definisce il linking number*

Le origini

# IL PRIMO GRANDE SVILUPPO

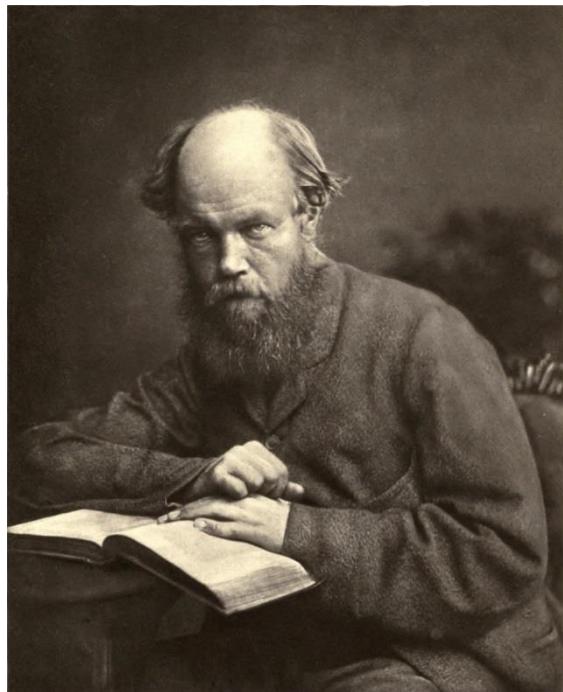


William Thomson, I barone Kelvin (1824-1907)

1867 formula la teoria dei **Vortex Atoms**

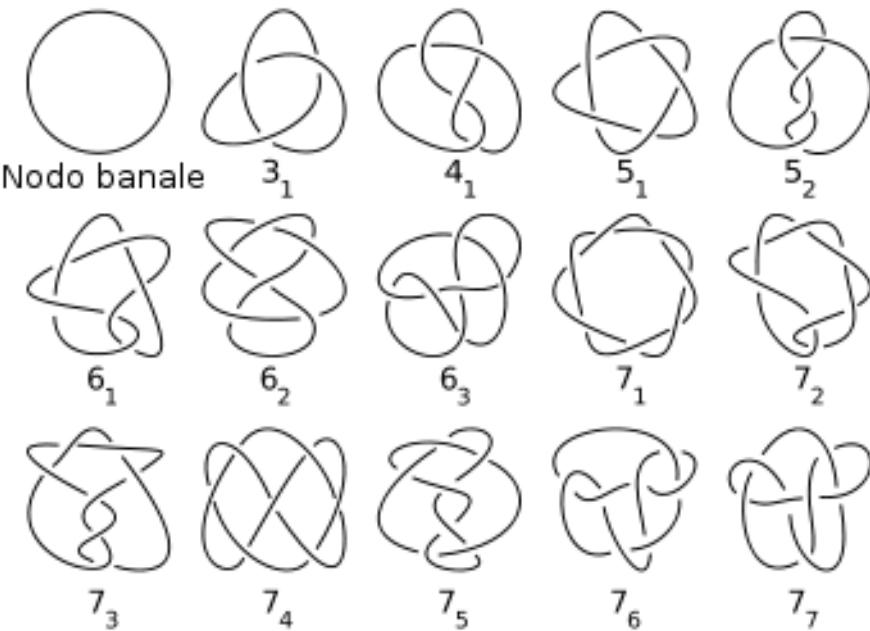
Le origini

# IL PRIMO GRANDE SVILUPPO



*Jours trouvés*  
P.G.Tait.

P. G. Tait, T. Kirkman, C. N. Little tabulano i nodi con meno di 10 incroci



ma la teoria di Thomson fallisce...

Modello Atomico di  
Thomson (**Fisica**)

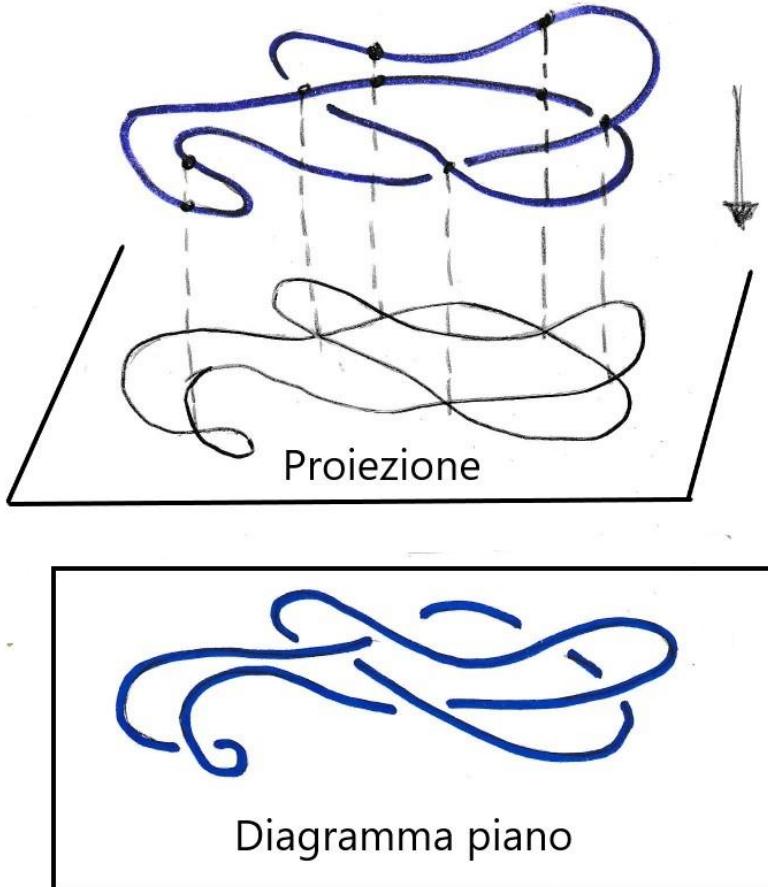
Arte

Artigianato/tecnologia

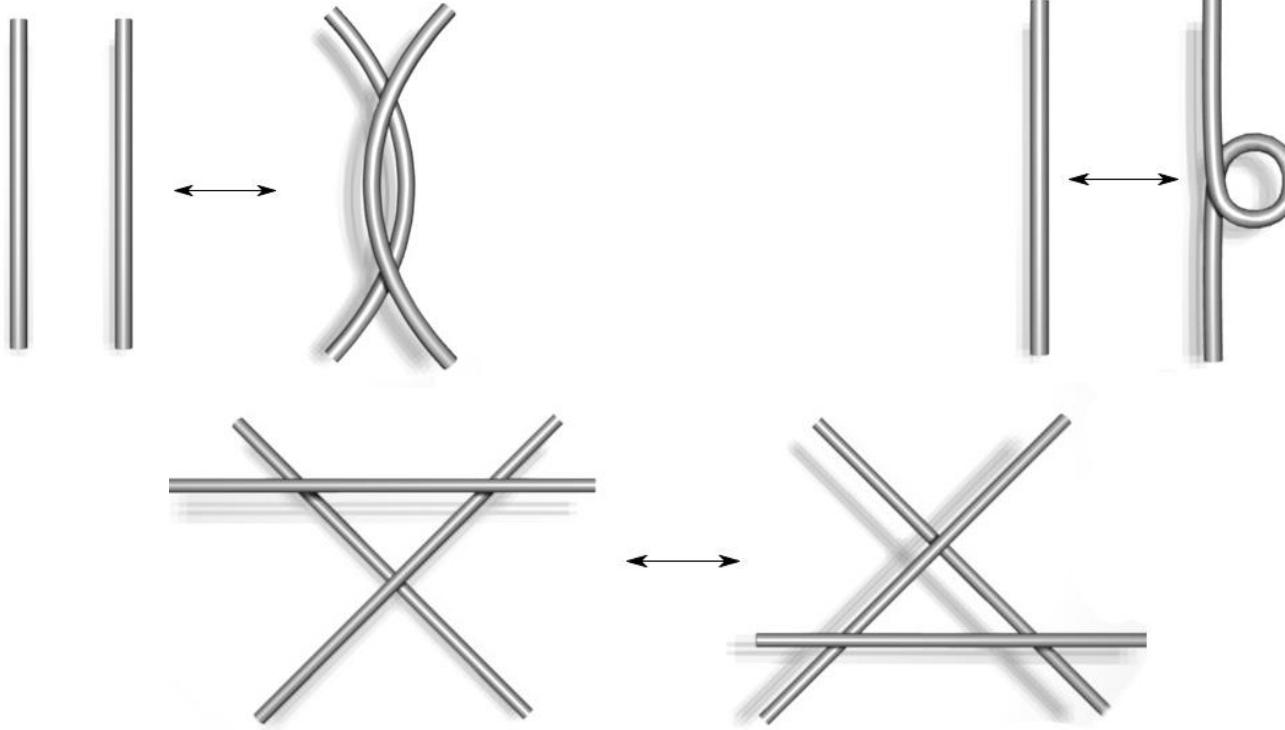
Topologia

Teoria dei nodi

# IL DIAGRAMMA DI UN NODO



# LE MOSSE DI REIDEMEISTER (1927)



Due nodi sono equivalenti se e solo se hanno dei diagramma legati da un numero finito di mosse di Reidemeister

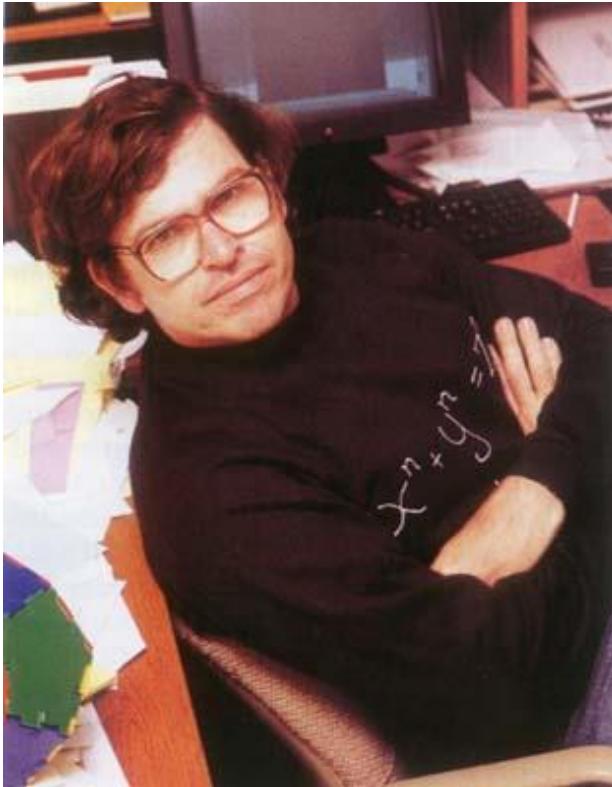
# VARIETA' DI DIMENSIONE TRE

Varietà di  
dimensione 2  
(superfici)



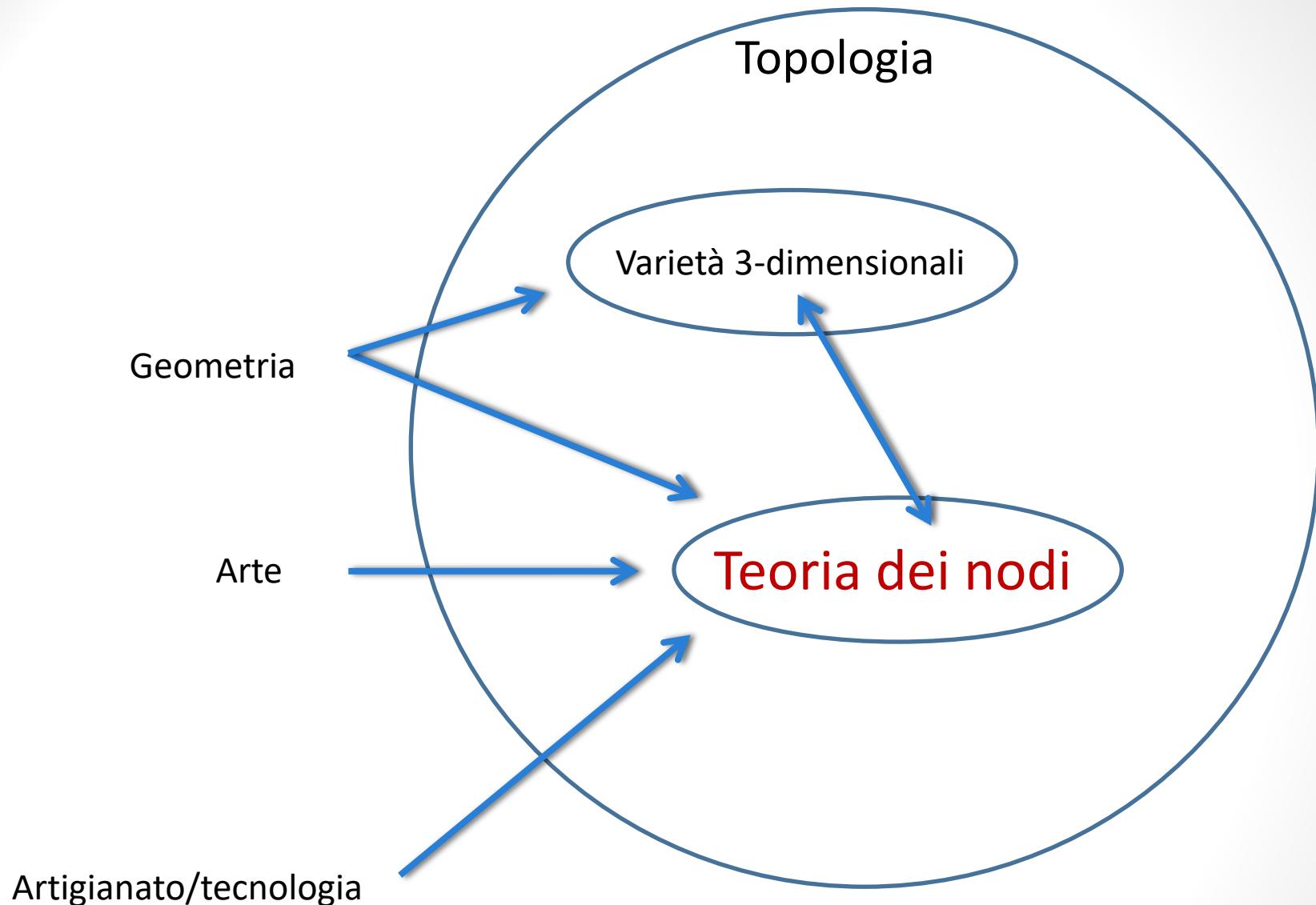
E le varietà di dimensione 3?  
Sembrava un problema intrattabile...

# VARIETA' DI DIMENSIONE TRE

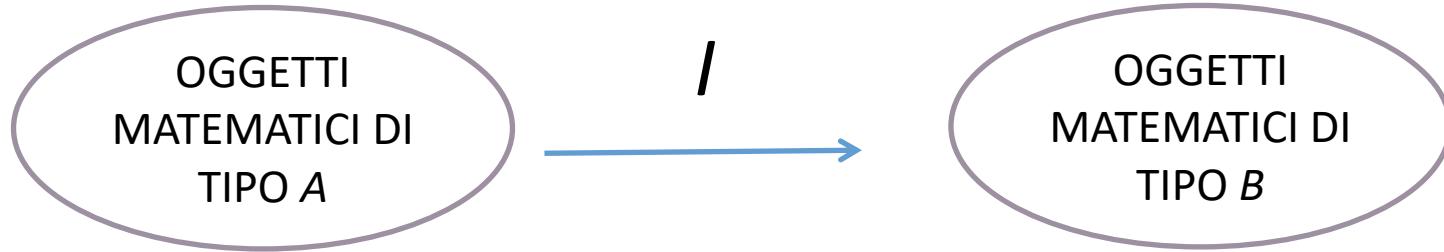


William Thurston (1946-2012)

La congettura di geometrizzazione di Thurston  
(1982)



# INVARIANTI



Se  $x$  è un oggetto di tipo  $A$ , allora  $I(x)$  è un oggetto di tipo  $B$ .

L'invariante  $I$  ha la seguente proprietà:

Se  $x$  e  $y$  sono due oggetti di tipo  $A$  equivalenti allora  $I(x)$  e  $I(y)$  sono due oggetti di tipo  $B$  equivalenti cioè:

$$x \sim y \Rightarrow I(x) \sim I(y)$$

In generale non è vero il viceversa.

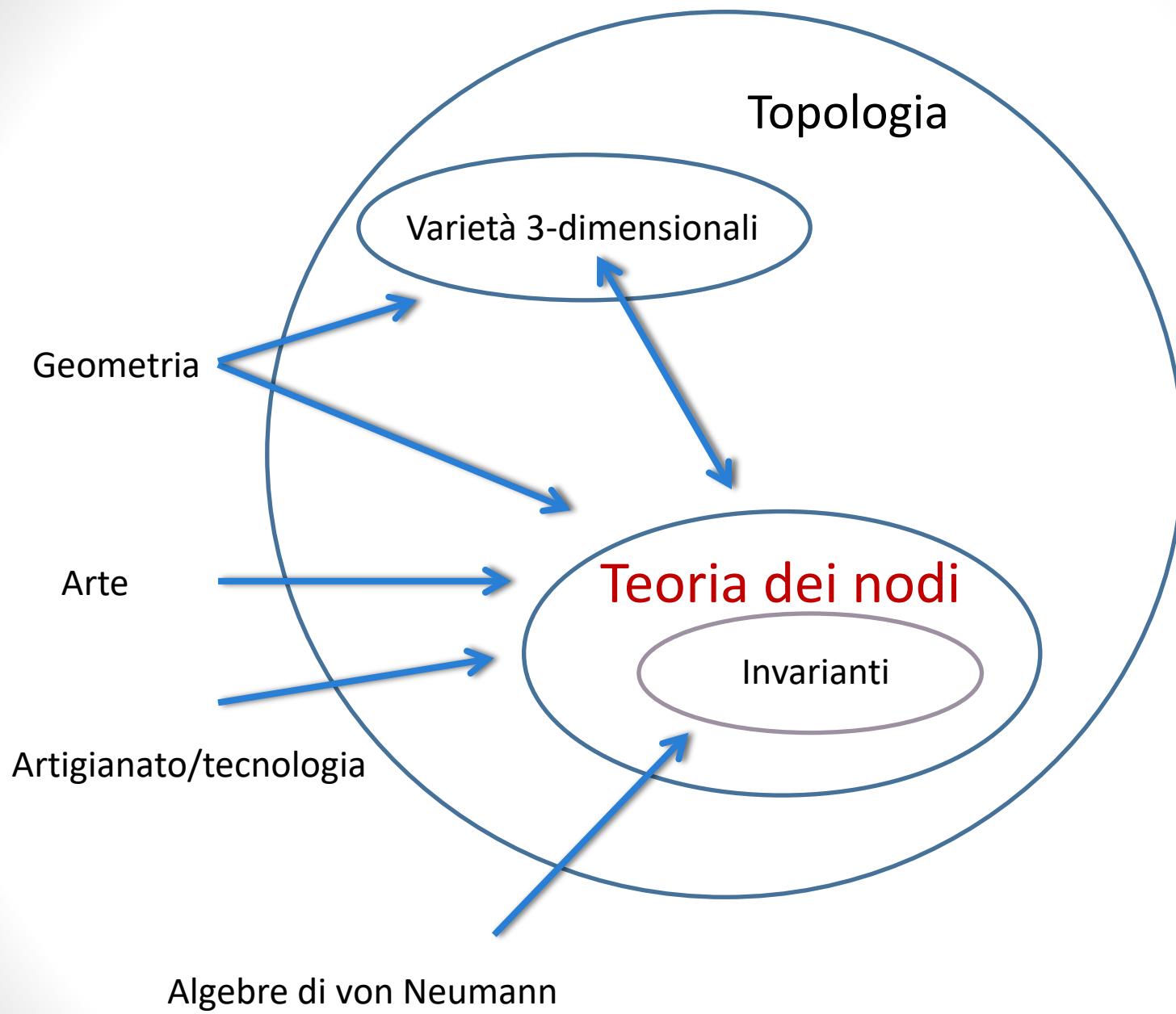
Questo si usa soprattutto nel seguente modo:

$$I(x) \not\sim I(y) \Rightarrow x \not\sim y$$

# UN NUOVO INVARIANTE PER NODI



Sir Vaughan Jones (1952- )  
Il polinomio di Jones



# UN NUOVO INVARIANTE PER NODI

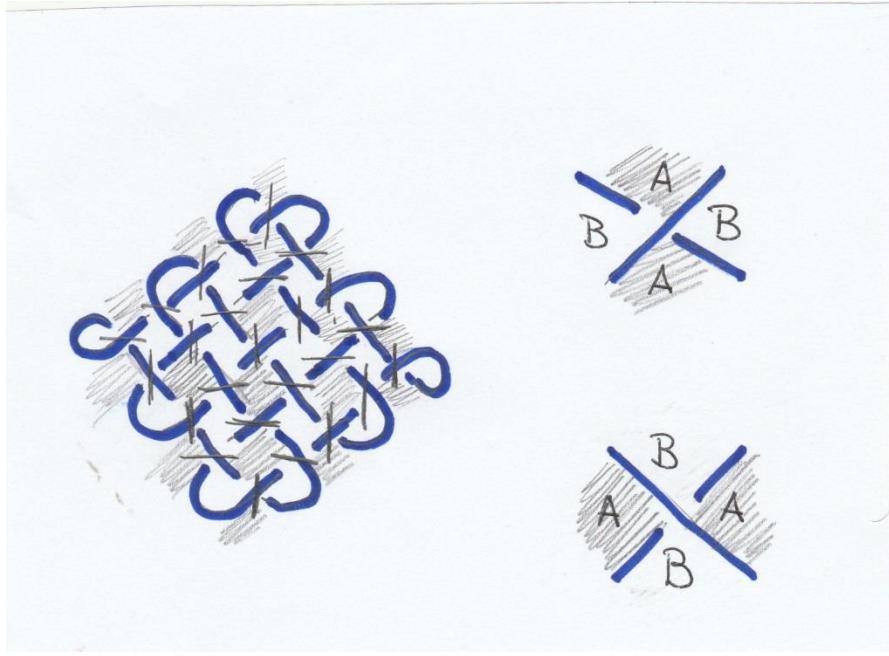
- L'invariante è molto potente! Ha risolto dei problemi aperti.
- Ma purtroppo (o per fortuna) non è un invariante totale...
- Ha una definizione molto interessante (che non è quella di Jones).

Louis H. Kauffman  
nel 1987 introduce il  
Kaufmann bracket



# UN NUOVO INVARIANTE PER NODI

L'idea viene dalla fisica statistica



$$\langle L \rangle = \sum_s A^{\alpha(s) - \beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma(s)}$$

# UN NUOVO INVARIANTE PER NODI

Le regole di calcolo del Kauffman bracket

$$1. \langle \text{circle} \rangle = 1$$

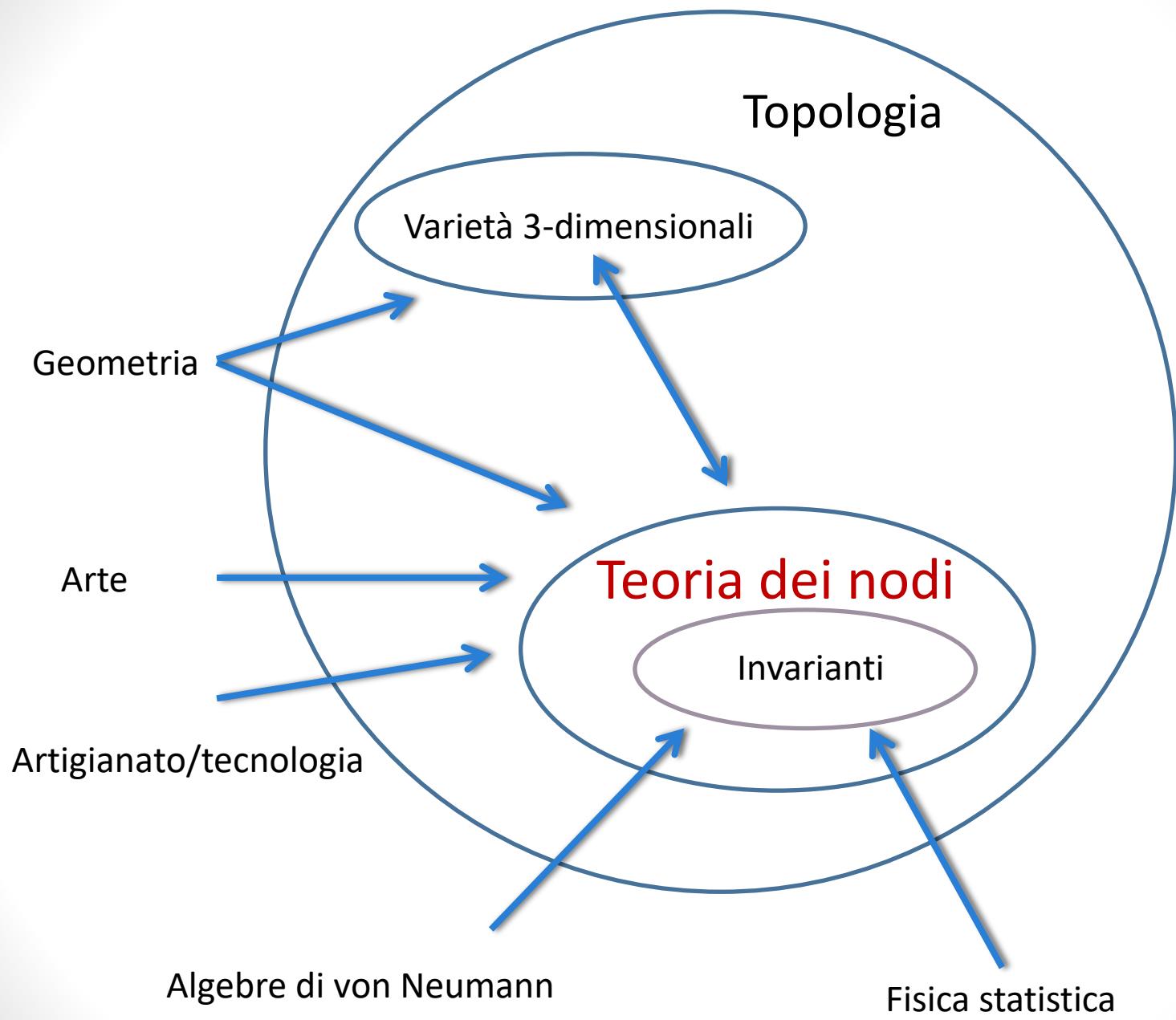
$$2. \langle L \cup \text{circle} \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$$

$$3. \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{undercrossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{overcrossing} \rangle$$

La relazione con il polinomio di Jones

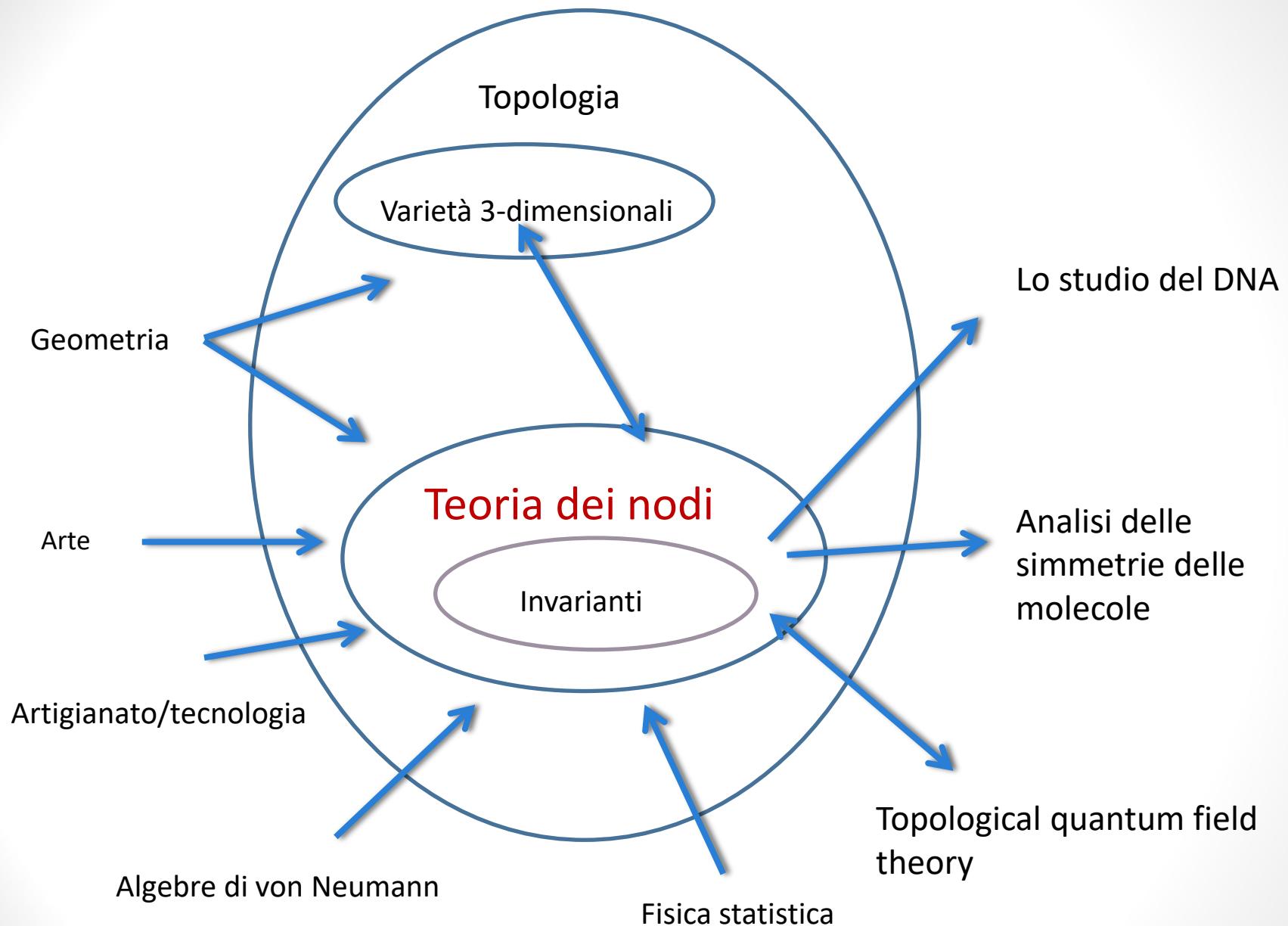
$$J(L) = (-A)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle$$

Usando queste formule si può dimostrare  
l'invarianza rispetto alle mosse di Reidemeister



E la storia continua: nuovi invarianti, nuovi risultati, nuove congetture e nuovi collegamenti!  
E le applicazioni?

# I nodi nella rete



# LA STRUTTURA TERZIARIA DEL DNA

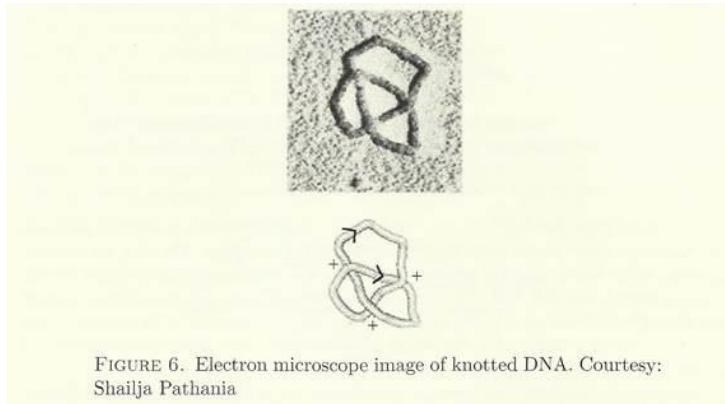
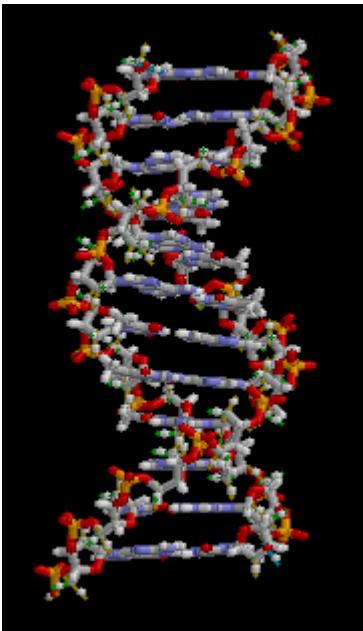
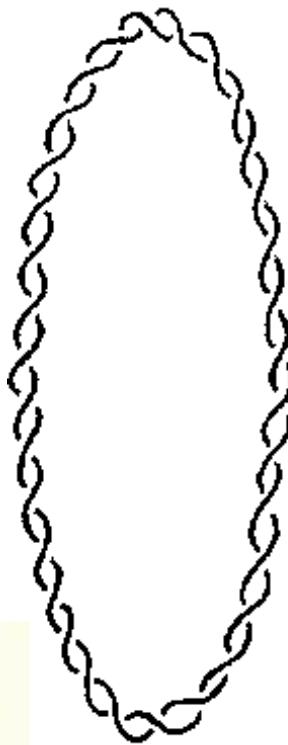
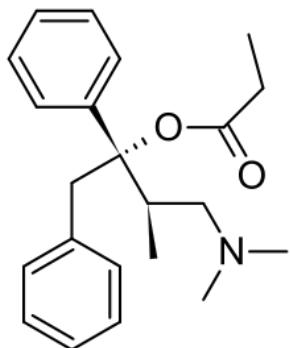


FIGURE 6. Electron microscope image of knotted DNA. Courtesy:  
Shailja Pathania



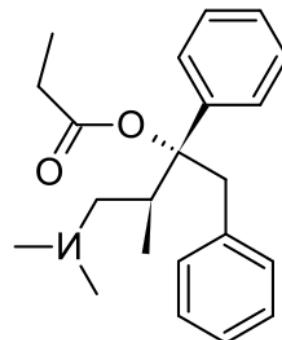
DNA topology

# CHIRALITA' DELLE MOLECOLE



DARVON

Destropropossifene  
Analgesico

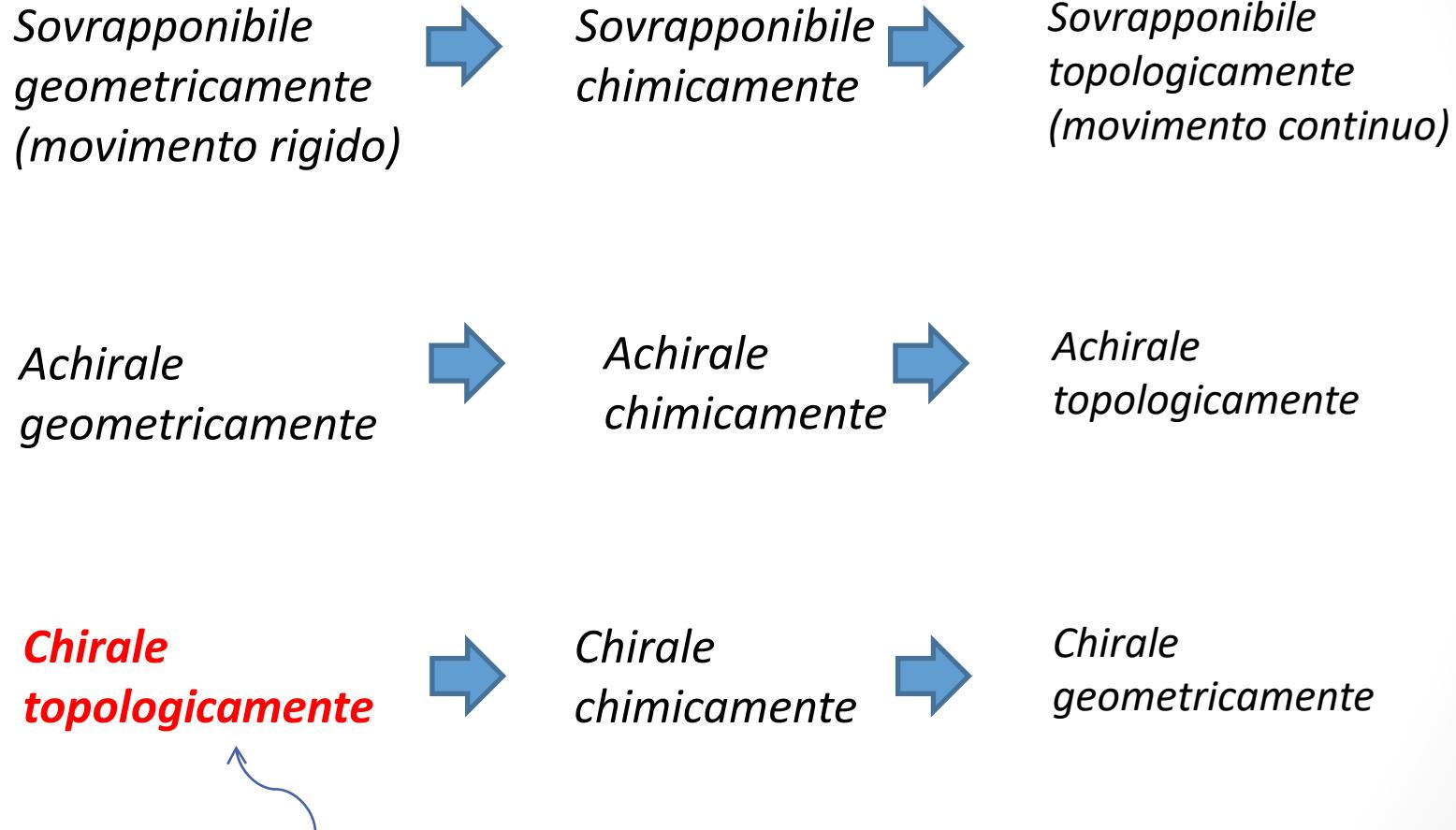


NOVRAD

Levopropossifene  
Antitussivo

Una molecola è **achirale** se è *sovrapponibile* alla sua immagine speculare. Altrimenti la molecola si dice **chirale**

# CHIRALITA' DELLE MOLECOLE



Per far vedere la chiralità topologica si usano tecniche tipiche della teoria dei nodi

# BIBLIOGRAFIA MINIMA

Alexei Sossinsky:

«Nodi. Genesi di una teoria Matematica»

Bollati Borringhieri 1999

Dorothy Buck e Erica Flapan (Editors):

«Applications of knot theory»

American Mathematical Society 2009